

Rocket Science

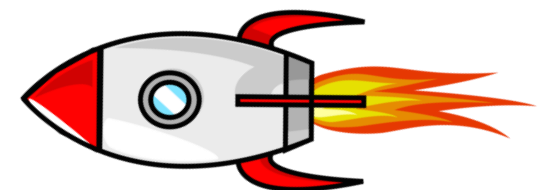
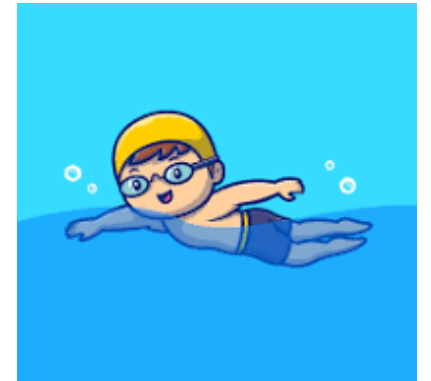
MINT-Woche

Wasserraketen 101

Vorlesung 1

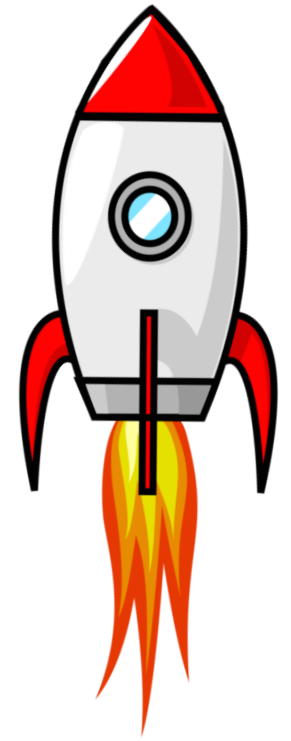
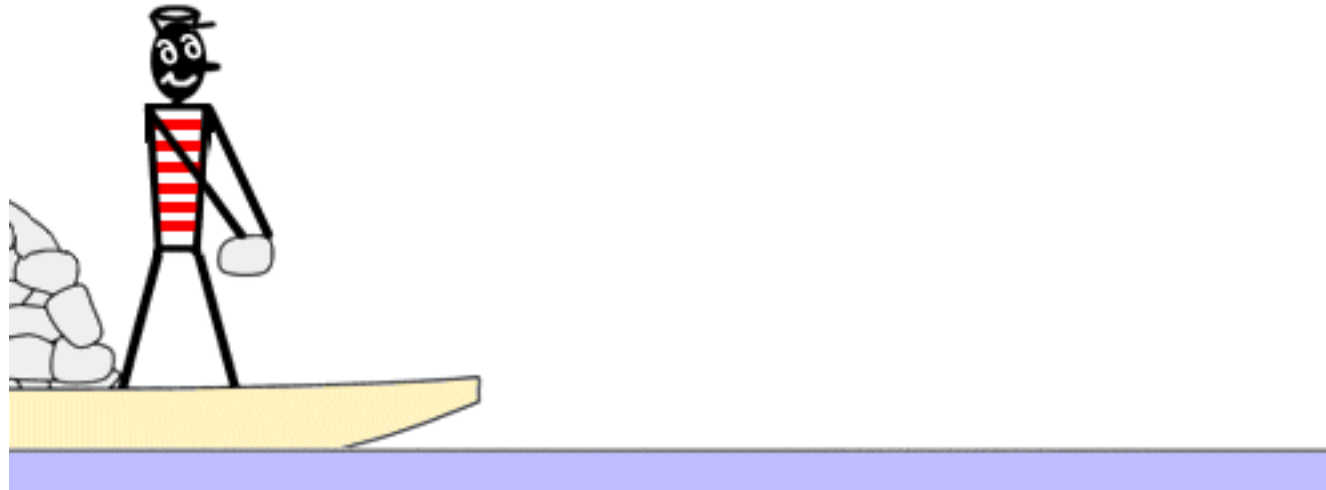
Schwimmende Astronauten

- Warum können wir im Wasser vorwärts schwimmen?
 - Widerstand, Wasser verdrängen
- Könnten wir auch im Vakuum des Weltalls ‘schwimmen’?
- Kann ein Propellerflugzeug, Jet oder Helikopter auch im Weltall fliegen?
 - Nein, da Medium fehlt.
- Warum kann denn eine Rakete sich im Weltall beschleunigen?
 - Anderes Funktionsprinzip: Rückstossprinzip



Raketengrundprinzip

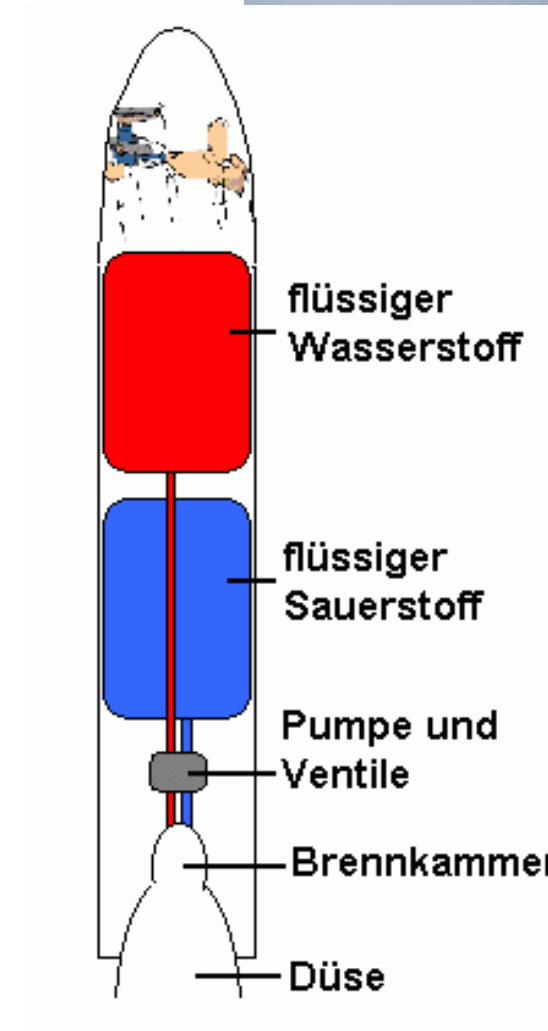
- Kann sich überall fortbewegen, indem man *Masse* in die **entgegengesetzte Richtung ausstösst**



- Ist Grundidee dahinter, wie Raketen funktionieren.
- Basiert auf **3. Newtonschem Gesetz** (actio = reactio) ...
- ... und **Impulserhaltung** (gleich mehr dazu)

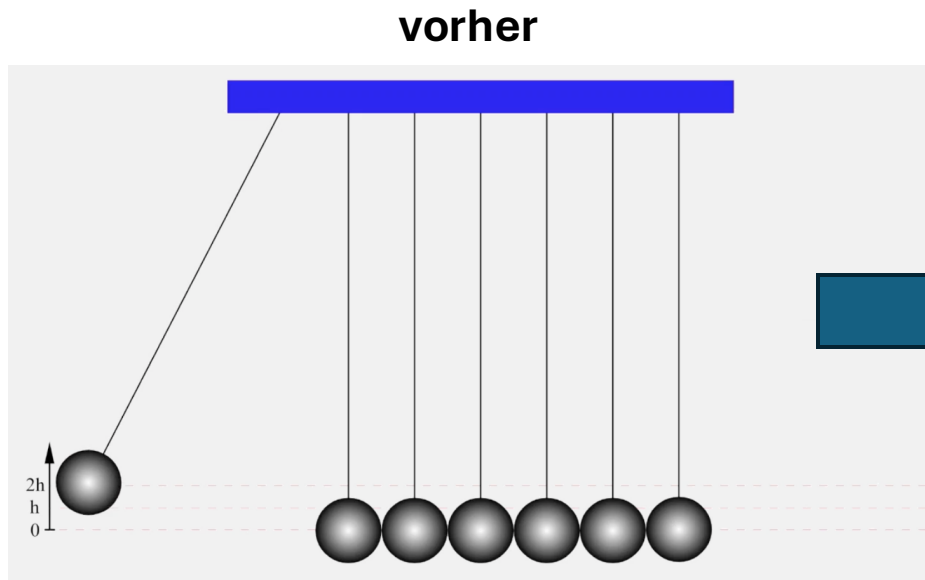
Raketengrundprinzip

- Flüssiger Treibstoff (z.B. Wasserstoff) wird mit Oxidationsmittel (z.B. flüssiger Sauerstoff) gemischt ...
- ... und in Brennkammer gezündet.
- Erzeugt heisses Gas, welches nach unten mit hoher Geschwindigkeit ausströmt -> Kraft nach unten (Schub)
- Nach 3. NG gibt entgegengesetzte Kraft, die Rakete nach oben drückt



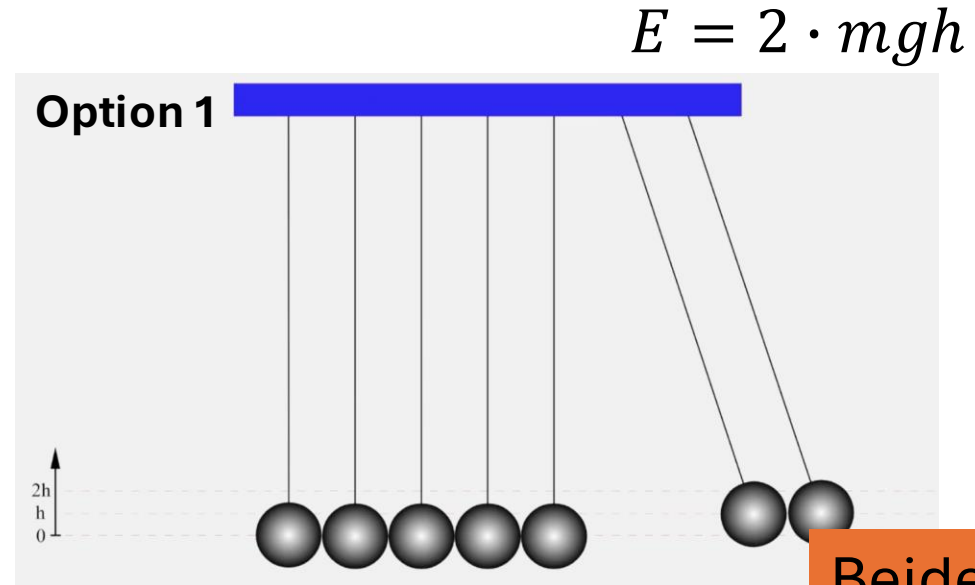
Impulserhaltung

Newton Pendel

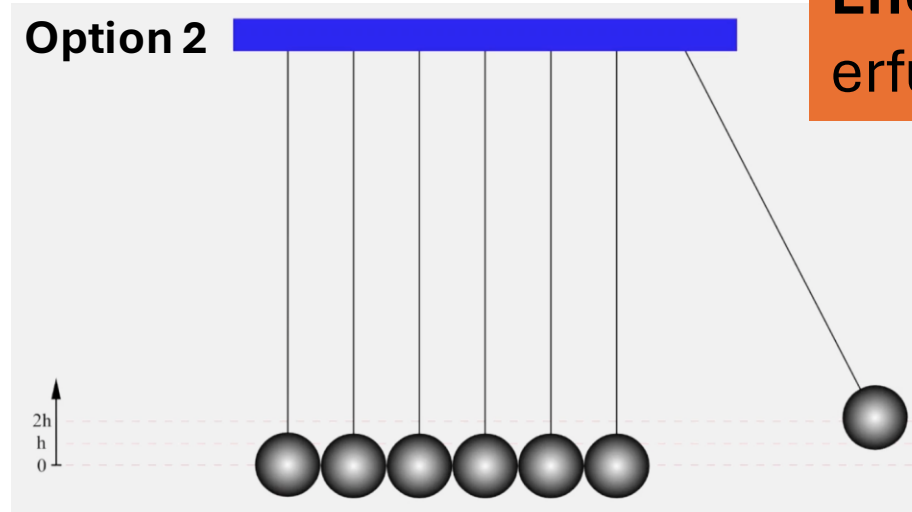


Energie: $E = mg(2h) = 2mgh$

Masse einer Kugel: m



nachher - oben oder unten?

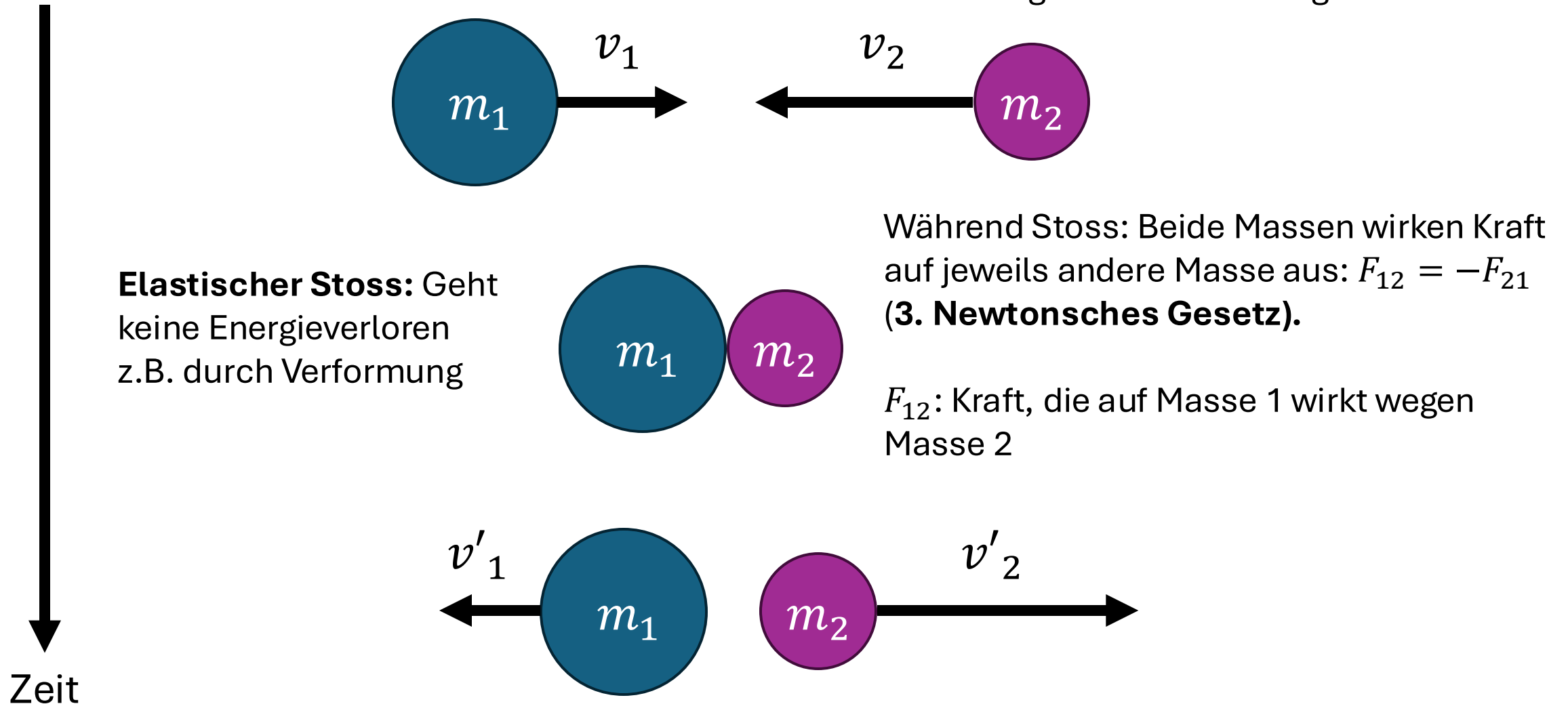


$E = mg(2h) = 2mgh$

Beide Varianten
würden
Energieerhaltung
erfüllen!

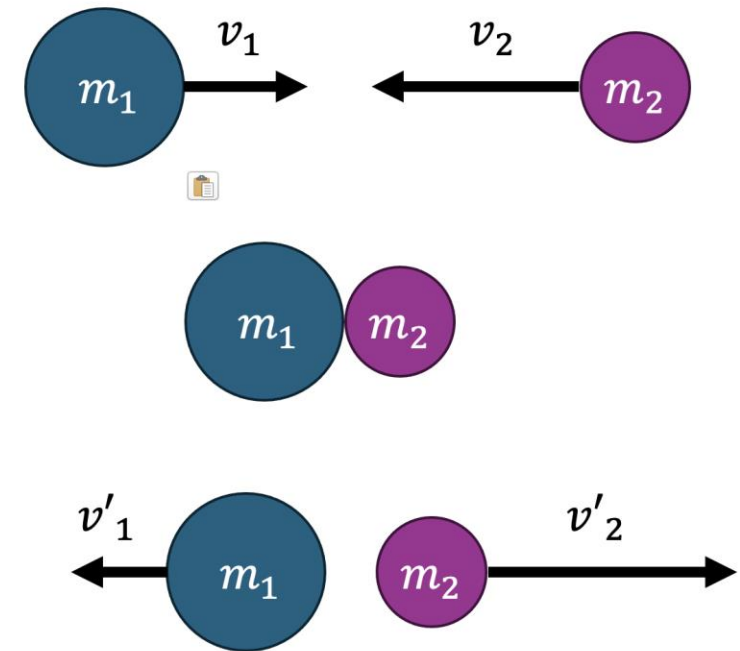
Zentraler Elastischer Stoss

positive Geschwindigkeit: nach rechts
negative Geschwindigkeit: nach links



Zentraler Elastischer Stoß

- Geschwindigkeiten vorher (v_1 & v_2) vs. nachher (v'_1 & v'_2)?
- $F_{12} = -F_{21}$ (3. Newtonsches Gesetz)
- $m_1 a_1 = -m_2 a_2$
- $m_1 \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\Delta v_2}{\Delta t} \quad | \cdot \Delta t$
- $m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2$
- $m_1 (v'_1 - v_1) = -m_2 (v'_2 - v_2)$
- $m_1 v'_1 - m_1 v_1 = -m_2 v'_2 + m_2 v_2$
- $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$



Zentraler Elastischer Stoss

- Neue physikalische Grösse: Masse m , die sich mit Geschwindigkeit v bewegt hat **Impuls:**

$$p = mv$$

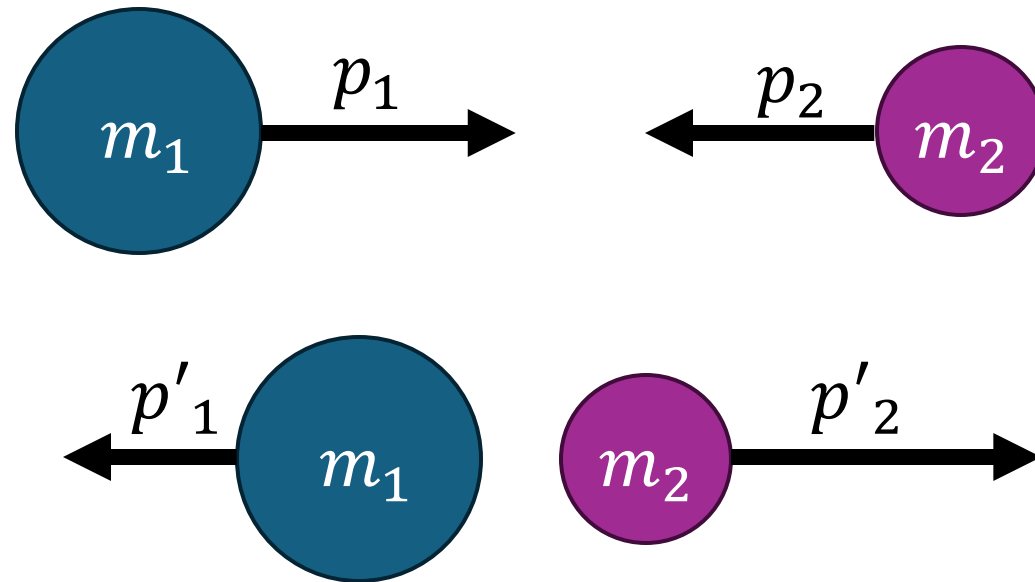
- Einheit: $[p] = [m][v] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Ns}$
- Für zentralen elastischen Stoss gilt also:
 - $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$
 - $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$

Impulserhaltung

- **Gesamtimpuls vor Stoss = Gesamtimpuls nach Stoss**

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$$

- -> In abgeschlossenem System gilt nicht nur Energieerhaltung sondern auch **Impulserhaltung!**



Geschwindigkeit nach Kollision

- Berechnung von v'_1 & v'_2

- Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)^2 = \frac{1}{2}m_1(v'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2)^2$$

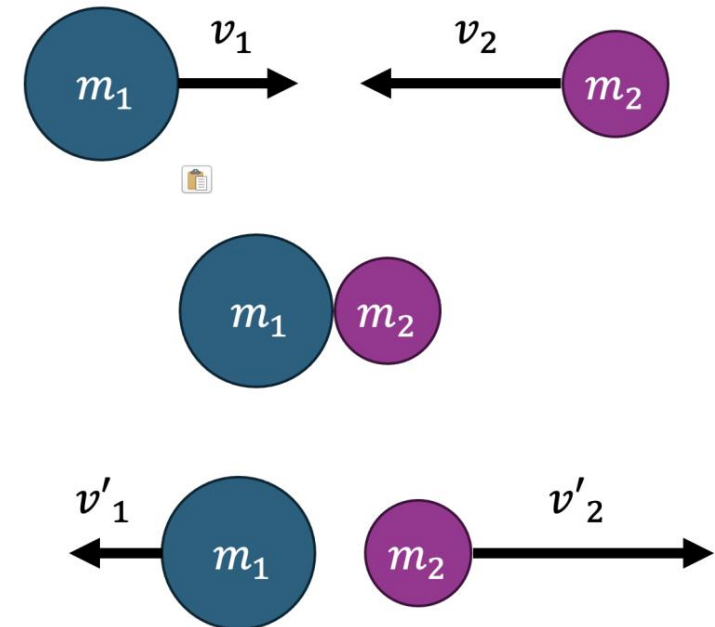
- Impulserhaltung:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

- Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten → Lösung:

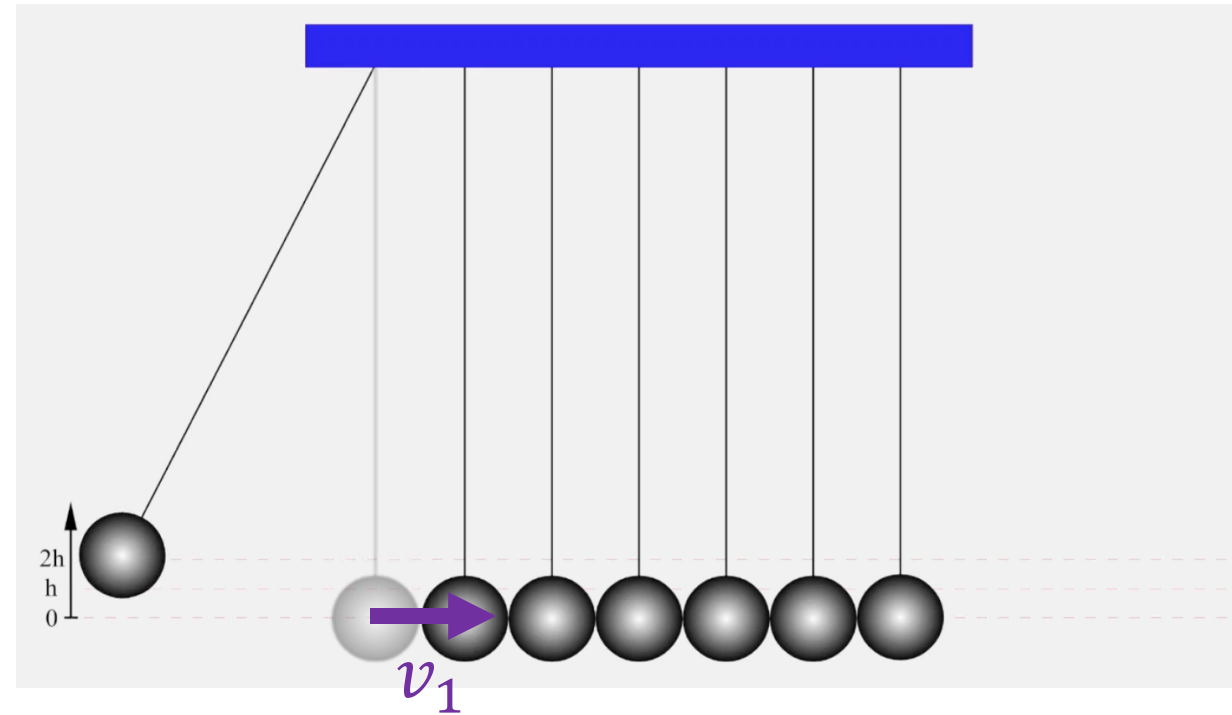
$$v'_1 = \frac{m_1v_1 + m_2(2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_2v_2 + m_1(2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$



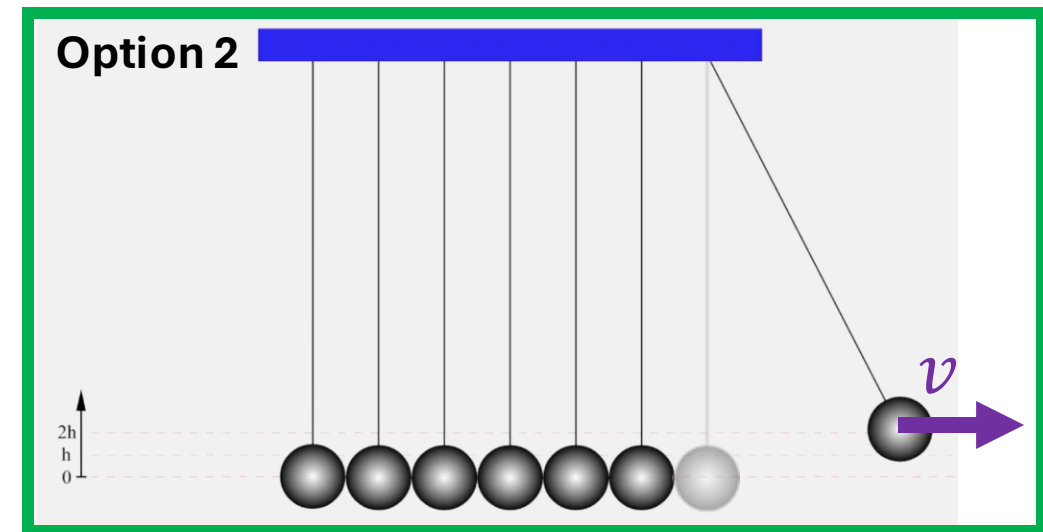
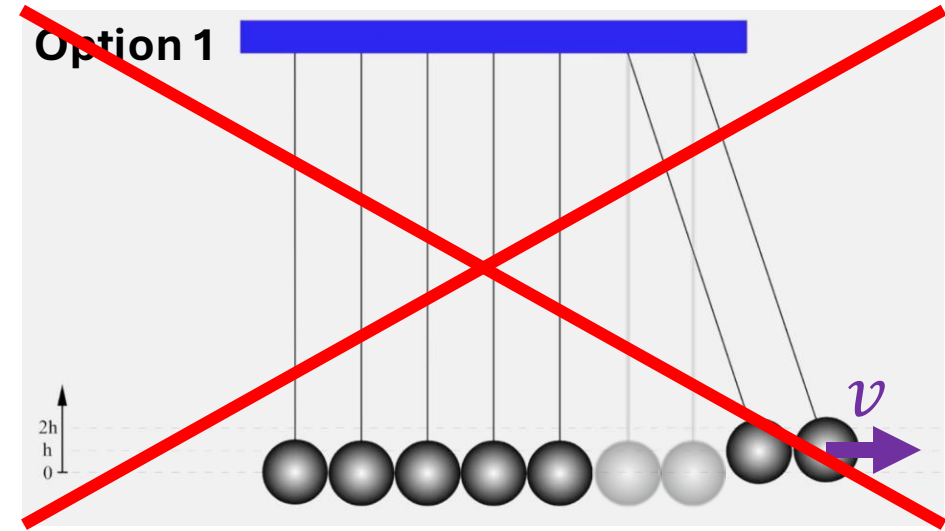
Newton Pendel

- Direkt vor Stoss:
 - Geschwindigkeit gegeben durch
$$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}$$
$$mg(2h) = \frac{1}{2}mv^2$$
 - $\rightarrow v = \sqrt{4gh}$
 - Gesamtimpuls:
$$p = mv = m\sqrt{4gh}$$



Newton Pendel

- Direkt nach Stoss - **Option 1:**
 - Geschwindigkeit gegeben durch
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
 - $\rightarrow v = \sqrt{2gh}$
 - Gesamtimpuls:
$$p = 2 \cdot m\sqrt{2gh} \neq m\sqrt{4gh}$$
 - $\rightarrow$ Verletzt Impulserhaltung!
- Direkt nach Stoss - **Option 2:**
 - Gesamtimpuls:
$$p = mv = m\sqrt{4gh}$$
 - $\rightarrow$ erfüllt Energie- & Impulserhaltung!



Aufgabe

1. Ein 40-Tonnen Lastwagen fährt ungebremst mit 50 km/h in einen parkierten und leeren Smart (kleines Auto, 1150kg). Bestimme die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge nach der Kollision in km/h.
2. Zwei Billardbälle (je 160g) treffen wie folgt aufeinander:



Welche Geschwindigkeiten haben sie nach der Kollision?

Formelsammlung:

- Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2)^2 = \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2$$

- Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

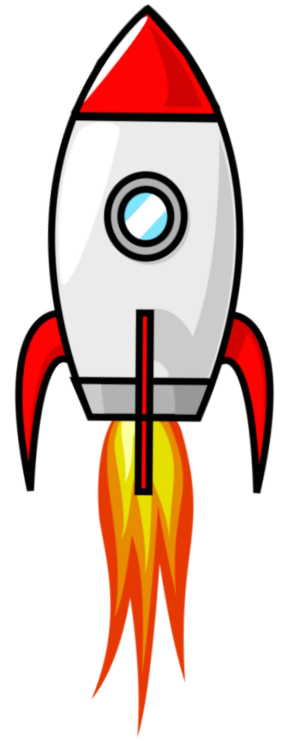
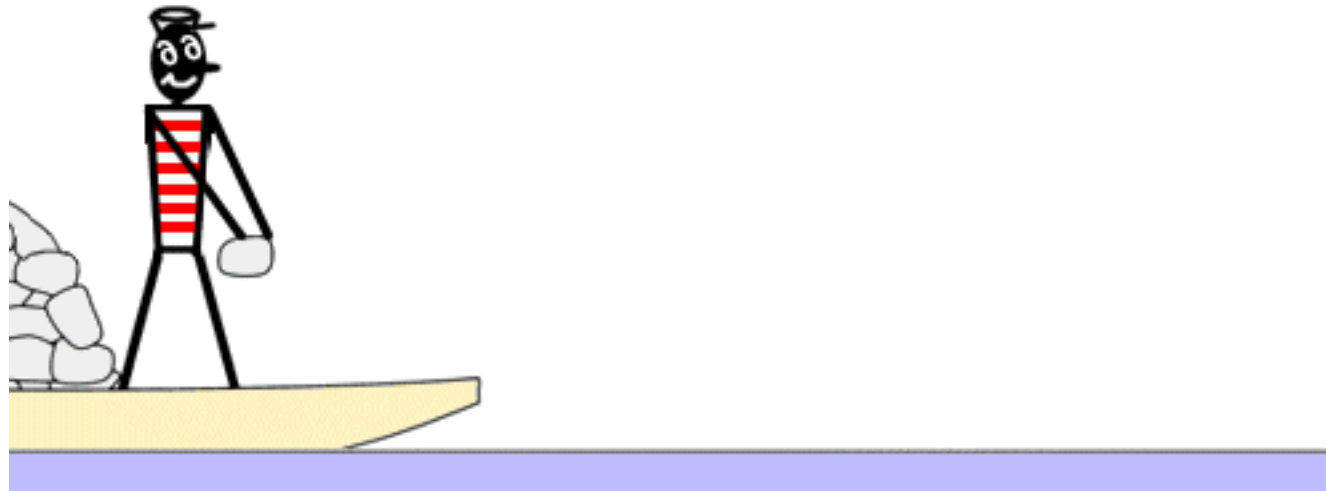
- Geschwindigkeiten nach Stoss:

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_2 v_2 + m_1 (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Raketengrundprinzip

- Kann sich überall fortbewegen, indem man *Masse* in die **entgegengesetzte Richtung ausstösst**



Raketengrundprinzip

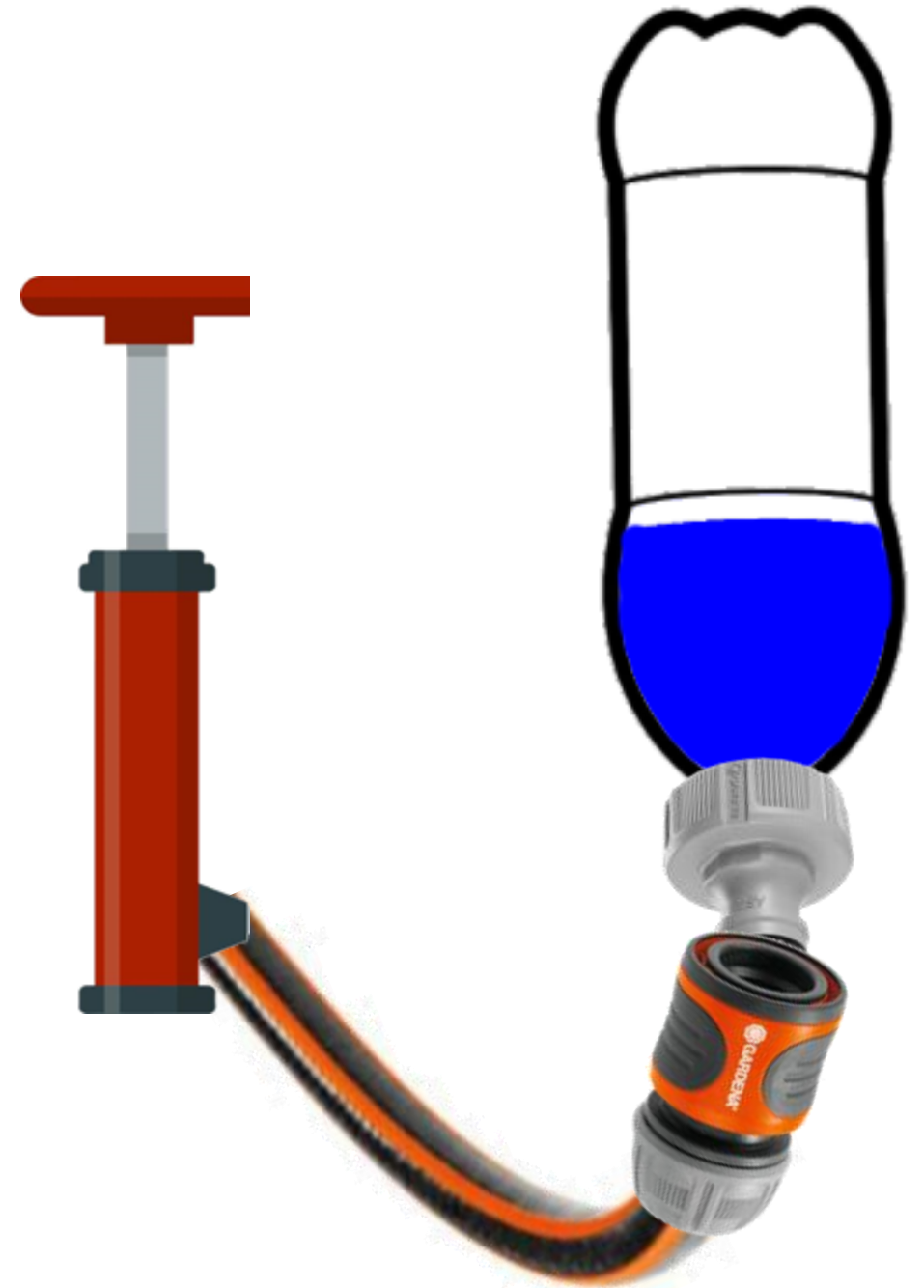
- Urs sitzt auf Bürostuhl (zusammen Masse von 90 kg) und hält einen Medizinball (10 kg) und schießt diesen in vertikale Richtung weg, so dass der Ball eine Geschwindigkeit von 3 m/s hat. Welche Geschwindigkeit hat Urs nach dem Wurf? Reibung wird komplett vernachlässigt.
- *Tipp:* Impulserhaltung



Wasserrackete

Wasserrakete

- Was passiert, wenn Luft in Flasche pumpt?
 - Luft wird komprimiert → Druck steigt
 - Wasser bleibt unverändert, da *inkompressibel*
- Raketenstart: Ventil entfernen
- Luft (unter hohem Druck) drückt Wasser nach unten
- → Rückstossprinzip



Rocket Math

Vorlesung 2

Fragen

- Warum füllte man Flasche überhaupt mit Wasser? Warum nicht nur Luft?
 - Nur Luft funktioniert, aber weniger gut.
 - Wasser viel höhere Dichte → höherer Impuls beim Ausstoss
- Folgt daraus, dass man möglichst viel Wasser in Flasche füllen sollte? Optimales Verhältnis $\frac{V_{\text{Wasser}}}{V_{\text{Flasche}}}$?
 - Gutes Mittelmaß. Benötigt doch noch genügend Luft, um Wasser ausstossen zu können.
 - Optimales Verhältnis typischerweise um 1/3. Kann experimentell bestimmt werden.

Ziel

- Grobe Idee verstehen, wie man vorgehen müsste, wenn man Physik simulieren wollte.

Rakete

- Gesamtimpuls zum Zeitpunkt t :

$$p(t) = mv$$

- Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$:

$$p(t + \Delta t) = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m u$$

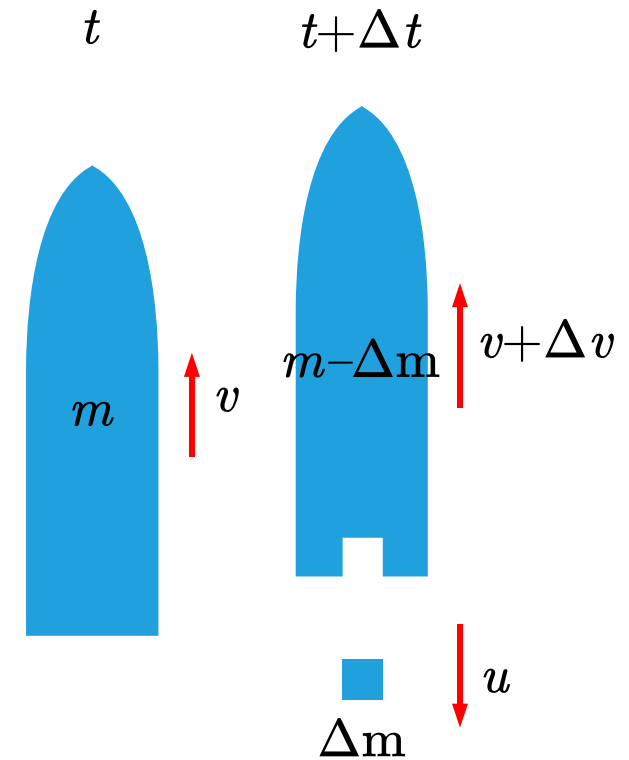
- Frage: Ist der Impuls erhalten? Gilt also

$$p(t) = p(t + \Delta t)$$

- Antwort: Nein! $p(t) > p(t + \Delta t)$

- Widerspruch zu Impulserhaltung?

- Nein, alles ok. Denn Raketenstart wirkt sich auch auf Impuls der Erde aus!

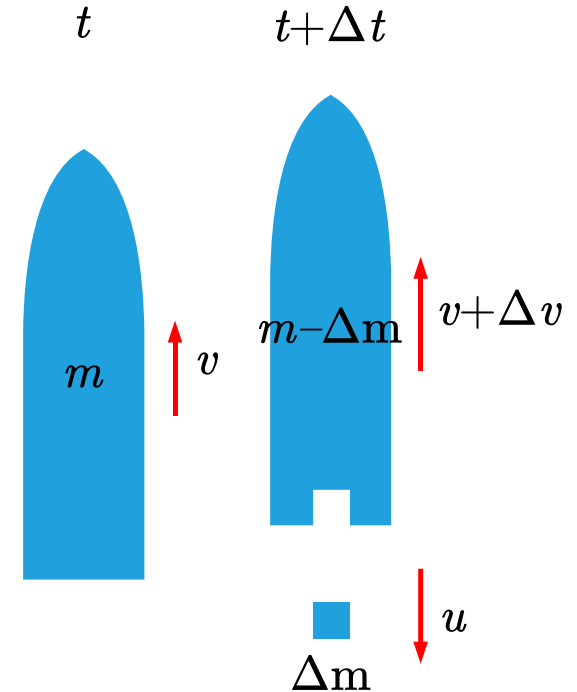


Rakete

- Impulsdifferenz:

$$\begin{aligned}\Delta p &= p(t + \Delta t) - p(t) \\ &= [(m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m u] - mv \\ &= mv - \Delta m v + m \Delta v - \Delta m \Delta v + \Delta m u - mv \\ &= m \Delta v - \Delta m (v + \Delta v - u) \\ &= m \Delta v - \Delta m v_{\text{rel}}\end{aligned}$$

- $v_{\text{rel}} = v + \Delta v - u$ ist **Ausströmgeschwindigkeit**, mit der Wasser aus Rakete schiesst.



Rakete

- Bisher: $\Delta p = m \Delta v - \Delta m v_{\text{rel}}$

- $\rightarrow$

Gravitationskraft:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F_G = -mg$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t} v_{\text{rel}}$$

Beschleunigung:

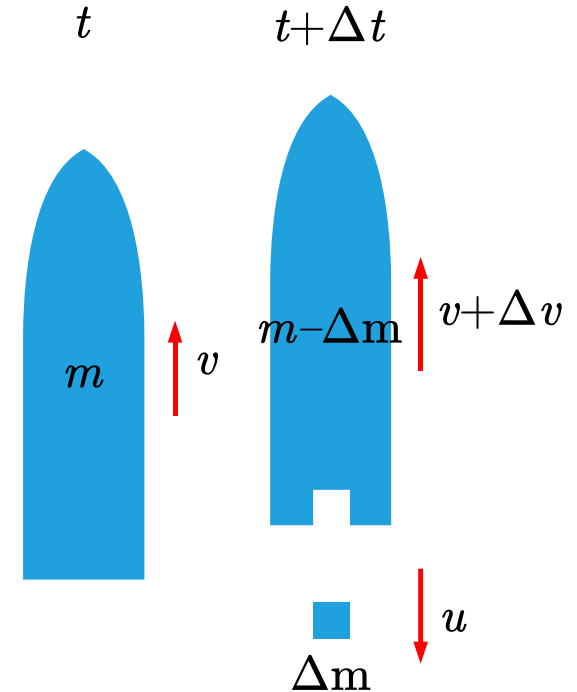
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- $\rightarrow$

$$-mg = ma - \mu v_{\text{rel}}$$

Massenstrom:

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$



Rakete

- Bisher: $-mg = ma - \mu v_{\text{rel}}$. Nach a auflösen.

- **Bewegungsgleichung:**

$$a(t) = \frac{\mu(t)}{m(t)} v_{\text{rel}}(t) - g$$

- Mit dieser kann man dann Geschwindigkeit bestimmen:

$$v(t) = \int_0^{t_{\text{Ende Brennphase}}} a(t) dt$$

- Achtung: Benötigt z.B. Fluidphysik, um $v_{\text{rel}}(t)$ zu bestimmen.
- → Numerische Integration