

Informatik: Zahlensysteme

sca / hof

KSR

17. März 2024

- 1 Einführung
- 2 Dezimal- & Binärsystem
- 3 Dezimal- & Binärsystem II
- 4 Rechnen im Binärsystem: Addition
- 5 Rechnen im Binärsystem: Negative Zahlen & Subtraktion
- 6 Codes zum Binärsystem
- 7 Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Was und wo ist das?



- Bahnhofsuhr St. Gallen
- Binäruhr

Binäruhr Bahnhof St. Gallen



- Binäruhr arbeitet mit **Binärsystem** (0 und 1) anstelle Dezimalsystem
- Zeigt an: Stunden (oben), Minuten (Mitte), Sekunden (unten)
- **Ziele heute:**
 - Wissen, warum Binärsystem relevant ist.
 - Bahnhofsuhr in St. Gallen entziffern können.

Binäruhr KSR

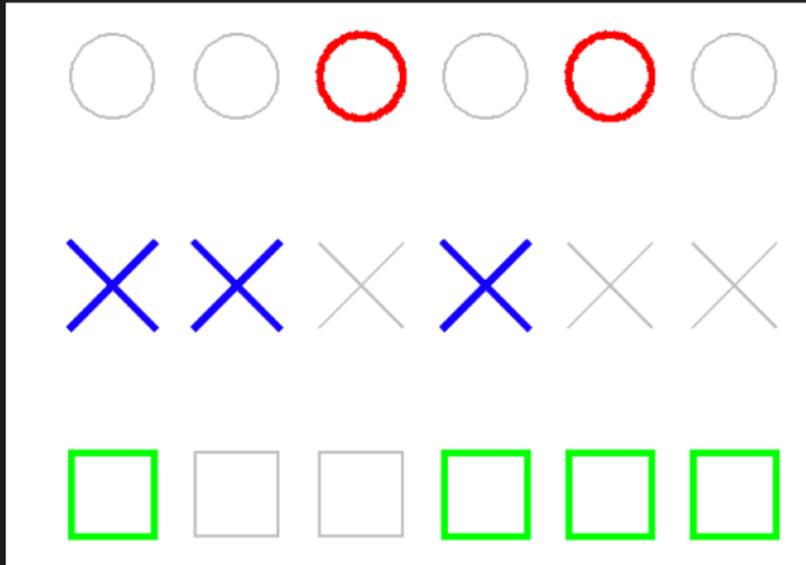


- Haben auch an KSR eine Binäruhr
- von Matthias Bühlmann und Philipp Dönni (TALIT, 2018-2022)

Demonstration

Challenge

- 2-3er Gruppen
- Wie spät ist hier?



- Antwort:
- 10:52:39

- Binäruhr (Dualsystem) zeigt Zeit im **Binärsystem** an, also nur mit 0 und 1
- Binärsystem ist ein **Zahlensystem** ...
- ... wie auch das Dezimalsystem, mit dem wir immer rechnen
- Wollen uns jetzt mit Zahlensystemen im Allgemeinen und insbesondere dem Binärsystem auseinandersetzen
- Warum ist Binärsystem relevant?
- Computer rechnet im Binärsystem!

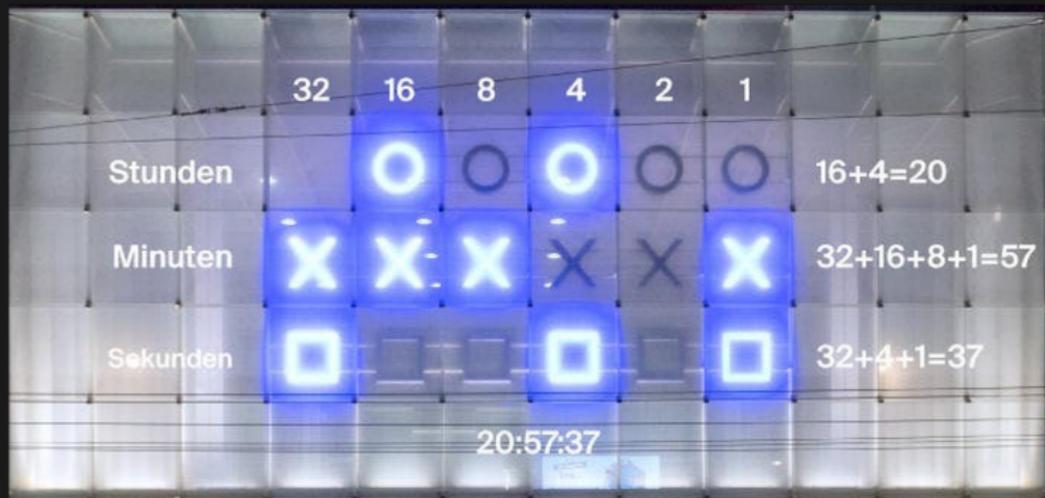
Computer und das Binärsystem

- Herzstück eines Computers ist **Prozessor / CPU** (central processing unit):



- Stellt Berechnungen an
- Beinhaltet Milliarden von Leitungen, Transistoren usw. . . .
- . . . in denen Strom fließen kann oder eben nicht
- Deshalb Binärsystem: 0 bedeutet 'es fließt kein Strom', 1 bedeutet "es fließt Strom"
- Um verstehen zu können, wie ein Computer funktioniert, muss man deshalb das Binärsystem beherrschen

Binäruhr lesen



Aufgaben: Binäruhr lesen

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3
Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6
16:20:52	03:44:09	11:12:13

Notiere deine Lösungen auf Papier/OneNote.

- 1 Einführung
- 2 Dezimal- & Binärsystem
- 3 Dezimal- & Binärsystem II
- 4 Rechnen im Binärsystem: Addition
- 5 Rechnen im Binärsystem: Negative Zahlen & Subtraktion
- 6 Codes zum Binärsystem
- 7 Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

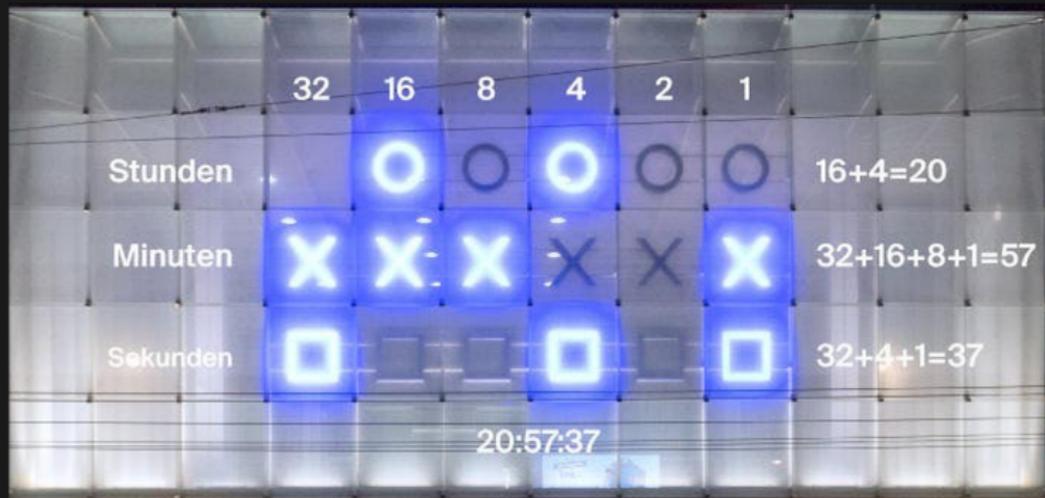
Warm-Up I

Uhrzeit 1:



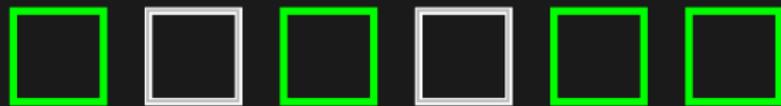
08 : 58 : 17

Warm-Up I



Warm-Up I

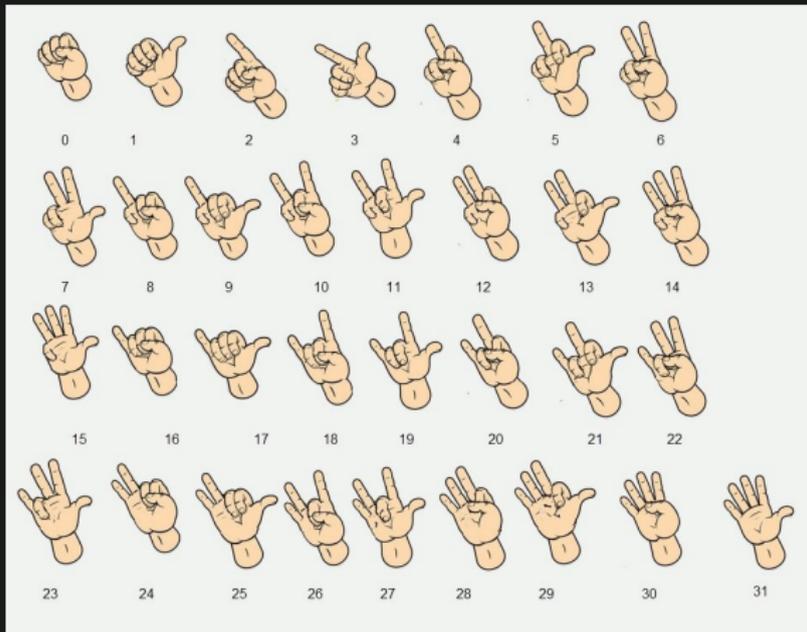
Uhrzeit 2:



12 : 22 : 43

Warm-Up II

Frage: Wie weit kann man mit einer Hand zählen?



- Wissen, was ein Zahlensystem ist
- Wissen, wie Dezimal & Binärsystem aufgebaut sind
- Umrechnen Binärsystem \rightarrow Dezimalsystem
- Code für Umrechnung schreiben

Definition

Ein **Zahlensystem** ist ein System, mit dem Zahlen dargestellt werden. Es wird durch seine **Basis** und seine **Nennwerte** festgelegt.

Beispiele für Zahlensysteme sind das uns sehr vertraute Dezimalsystem, das Binärsystem (Basis 2) oder das Hexadezimalsystem (Basis 16).

Dezimalsystem

- Das **Dezimalsystem** (auch **Zehnersystem**) ist das Zahlensystem mit ...
- Basis 10 und ...
- Nennwerte 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Die Zahl 1903_{10} ist dann wie folgt zu interpretieren:

$$1903_{10} = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

- Mit der *kleinen Zahl unten rechts* (10) deuten wir an, dass die Zahl im Dezimalsystem zu betrachten ist.
- Lässt man diese Zahl weg, schreibt man also z.B. 576, so bedeutet dies (meistens), dass die Zahl im Dezimalsystem steht.

"I told my friend 10 jokes about the binary system - He didn't get either of them!"

Definition

Die kleinste Informationseinheit ist das **Bit**, es hat zwei Möglichkeiten: es kann entweder 0 oder 1 sein. In der Welt der Elektrotechnik hat diese eine besondere Relevanz, da diese den beiden Zuständen 'es fließt kein Strom (0)' oder 'es fließt Strom (1)' entsprechen.

Deshalb ist das **Binärsystem** wichtig: Die Basis ist 2 und die Nennwerte sind 0 und 1. Eine Binärzahl besteht also aus mehreren Bits.

Das **Umrechnen einer Binärzahl in eine Dezimalzahl** geht ganz einfach. Für die Zahl 100101_2 geht man wie folgt vor:

$$\begin{aligned}100101_2 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 32_{10} + 4_{10} + 1_{10} \\ &= 37_{10}\end{aligned}$$

Dossier auf OneNote (beinhaltet alle Theorie von heute)

- Aufgabe 2.1
- Aufgabe 3.1
- Aufgabe 3.2
- Aufgabe 3.3
 - Code: Binärzahl in Dezimalzahl
 - alleine oder in 2er-Gruppe (keine 3er usw.)
 - **Abgabe bis heute Abend per Teams**
 - falls in Gruppe gearbeitet nur 1 Abgabe
 - keinen kopierten Code abgeben

- 1 Einführung
- 2 Dezimal- & Binärsystem
- 3 Dezimal- & Binärsystem II**
- 4 Rechnen im Binärsystem: Addition
- 5 Rechnen im Binärsystem: Negative Zahlen & Subtraktion
- 6 Codes zum Binärsystem
- 7 Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Welche Zahl (als Binär- und Dezimalzahl) wird hier dargestellt?



$$101_2 = 2^2 + 2^0 = 4 + 1 = 5$$

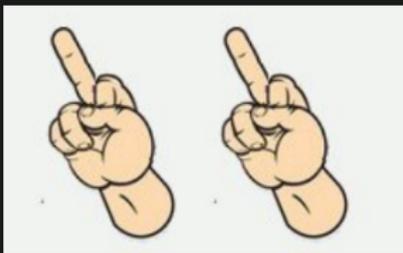
Warm-Up I

Welche Zahl (als Binär- und Dezimalzahl) wird hier dargestellt?



$$11101_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29$$

Welche Zahl (als Binär- und Dezimalzahl) wird hier dargestellt?



$$00100\ 00100_2 = 2^7 + 2^2 = 128 + 4 = 132$$

- **Wie weit kann man mit einer Hand zählen?**
- Antwort: 31
- Warum?
- Jeder Finger 2 Möglichkeiten
- 5 Finger: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ Möglichkeiten
- da Null eine Möglichkeit . . .
- höchste Zahl ist $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$
- **Wie weit kann man mit zwei Händen zählen?**
- Antwort: $2^{10} - 1 = 1023$

- Dezimalzahlen in Binärzahlen umrechnen können
- Andere Personen eloquent beleidigen können

Plan:

- ① Umrechnung Dezimalzahl \rightarrow Binärzahl demonstrieren und erklären.
ALTERNATIVE: Selbst studieren im Dossier.
- ② Tipps für A3.3, fertig machen bis heute Abend und abgeben per Teams
- ③ HA korrigieren, Lösungen auf OneNote
- ④ restliche Aufgaben im Dossier: A3.4-3.6

Umrechnung: Dezimalzahl zu Binärzahl

42_{10} als Binärzahl?

$$\text{Schritt 1: } 42 / 2 = 21 \text{ Rest: } 0$$

$$\text{Schritt 2: } 21 / 2 = 10 \text{ Rest: } 1$$

$$\text{Schritt 3: } 10 / 2 = 5 \text{ Rest: } 0$$

$$\text{Schritt 4: } 5 / 2 = 2 \text{ Rest: } 1$$

$$\text{Schritt 5: } 2 / 2 = 1 \text{ Rest: } 0$$

$$\text{Schritt 6: } 1 / 2 = 0 \text{ Rest: } 1$$

Das Resultat ist also: $42_{10} = 101010_2$

Umrechnung: Dezimalzahl zu Binärzahl

37_{10} als Binärzahl? Kompakte Darstellung:

37	
18	1
9	0
4	1
2	0
1	0
0	1

Das Resultat ist also

$$37_{10} = 100101_2$$

- 1 Einführung
- 2 Dezimal- & Binärsystem
- 3 Dezimal- & Binärsystem II
- 4 Rechnen im Binärsystem: Addition**
- 5 Rechnen im Binärsystem: Negative Zahlen & Subtraktion
- 6 Codes zum Binärsystem
- 7 Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

- Binärzahlen schriftlich addieren können

Warm-Up I: Binärzahl \rightarrow Dezimalzahl

- **Umwandlung Binärzahl \rightarrow Dezimalzahl**
- Binäruhr lesen (TigerJython Programm)

Warm-Up II: Dezimalzahl \rightarrow Binärzahl

- **Umwandlung Dezimalzahl \rightarrow Binärzahl**
- Restwertalgorithmus

Warm-Up II: Dezimalzahl \rightarrow Binärzahl

37_{10} als Binärzahl? Restwertalgorithmus:

37	
18	1
9	0
4	1
2	0
1	0
0	1

Das Resultat ist also

$$37_{10} = 100101_2$$

Wende nun selbst Restwertalgorithmus an um folgende Dezimalzahlen in Binärzahlen umzuwandeln:

① $29_{10} = ?_2$

② $43_{10} = ?_2$

③ $64_{10} = ?_2$

④ $100_{10} = ?_2$

Lösungen:

① $29_{10} = 11101_2$

② $43_{10} = 101011_2$

③ $64_{10} = 1000000_2$

④ $100_{10} = 1100100_2$

Auftrag: Addition von Binärzahlen

- Löse Aufgabe in Kapitel 3.2:
- Aufgabe 3.7: Schriftliches Addieren von Dezimalzahlen und Binärzahlen
- Aufgabe 3.8: Code schreiben, der Binärzahlen addiert

- 1 Einführung
- 2 Dezimal- & Binärsystem
- 3 Dezimal- & Binärsystem II
- 4 Rechnen im Binärsystem: Addition
- 5 Rechnen im Binärsystem: Negative Zahlen & Subtraktion
- 6 Codes zum Binärsystem
- 7 Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Warm-Up I: Binäruhr

- Binäruhr an KSR im Physiktrakt
- Wie spät ist hier?



17 : 28 : 51

Warm-Up II: Binäre Addition

- $1110_2 + 1011_2 = ?$
- $1110_2 + 1011_2 = 1\ 1001_2$

- Wissen, wie negative Zahlen als Binärzahlen ausgedrückt werden
- binär Subtrahieren können

Negative Zahlen & Subtraktion

- Subtraktion ist keine eigene Operation
- 'Subtraktion = Addition der Gegenzahl'
- Beispiel:

$$7 - 4 = 7 + (-4) = 3$$

- um *Subtraktion* zu verstehen, muss man *negative Zahlen* verstehen

Negative Binärzahlen

- Ideen, wie man negative Zahlen als Binärzahlen ausdrücken kann?
- **Idee 1:**
 - Erstes Bit entscheidet über positiv/negativ
 - Beispiel: $0110_2 = 6_{10}$ und $1110_2 = -6_{10}$
 - Problem: Addiert man Zahl mit Gegenzahl, ergibt dies nicht 0:

$$0110_2 + 1110_2 = 10100_2 \neq 0$$

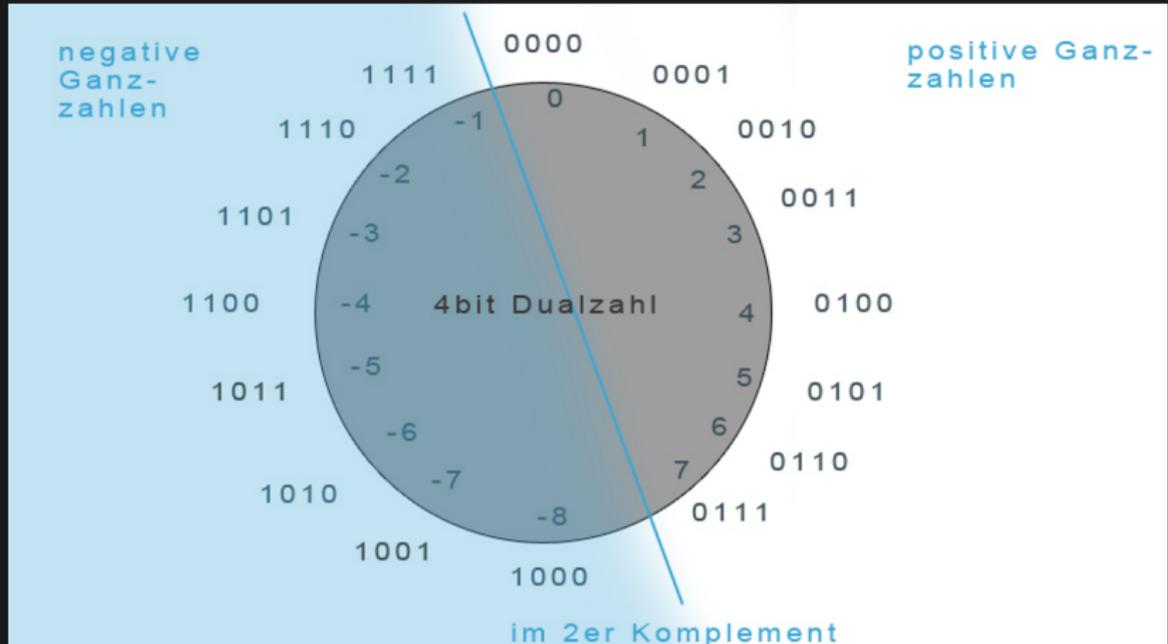
- Deshalb: Ist **nicht**, wie wir negative Binärzahlen darstellen!
- **Idee 2:**
 - Finde Gegenzahl so, dass 'Zahl + Gegenzahl' = 0
 - Beispiel: $1101_2 + ?_2 = 0$
 - Leite an Wandtafel her

Negative Binärzahlen: 2er Komplement

- Negative Zahl ist gegeben durch **2er-Komplement**
- **Rezept** Bestimmung 2er-Komplement:
 - ① Die Zahl wird in der gewünschten Anzahl Bits ausgedrückt.
 - ② Dann werden alle Bits invertiert ($0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$) ...
 - ③ und am Schluss 1 dazu addiert.
- Wichtig: Muss sich festlegen, aus wie vielen Bits Zahlen bestehen!
- Beispiel:
 - ① Zahl: 1101_2
 - ② Bits invertieren: 0010_2
 - ③ Eins addieren: 0011_2
- Kontrolle Beispiel:

$$1101_2 + 0011_2 = 1\ 0000_2 = 0 \text{ (in 4-bit)}$$

Negative Binärzahlen: 2er Komplement



Auftrag

- falls noch nicht ganz klar: Theorie zu 'Negative Zahlen & Subtraktion' im Dossier studieren
- Aufgaben 3.9-3.11 lösen
- Codes Binärzahl \rightarrow Dezimalzahl und Dezimalzahl \rightarrow Binärzahl: fertig machen / nochmals genau anschauen (werden in nächster Lektion besprochen)
- Zusatzaufgaben: Siehe Zusatzaufgaben von letzter Lektion auf dem Wiki
- **Hausaufgaben:** Auftrag fertig (ausser Zusatzauftrag)

- 1 Einführung
- 2 Dezimal- & Binärsystem
- 3 Dezimal- & Binärsystem II
- 4 Rechnen im Binärsystem: Addition
- 5 Rechnen im Binärsystem: Negative Zahlen & Subtraktion
- 6 Codes zum Binärsystem**
- 7 Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

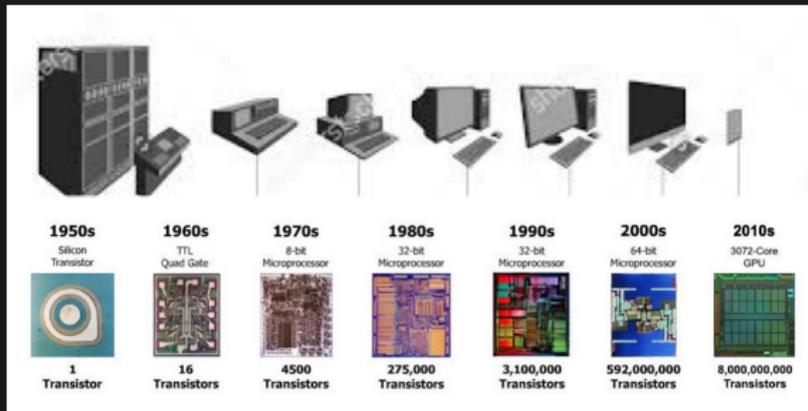
- **Ziele:** Verstehe folgende drei **Codes** und kann sie selbständig programmieren:
 - ① Binärzahl \rightarrow Dezimalzahl [Aufgabe 3.3]
 - ② Dezimalzahl \rightarrow Binärzahl (Restwertalgorithmus) [Aufgabe 3.6]
 - ③ Addition von Binärzahlen [Aufgabe 3.8]
- **Zusatzaufgaben:**
 - Schreibe einen Code, der von einer Binärzahl das **2er-Komplement bestimmt**. Nutze diesen Code . . .
 - um einen Code zu schreiben, der Binärzahlen subtrahiert.

- 1 Einführung
- 2 Dezimal- & Binärsystem
- 3 Dezimal- & Binärsystem II
- 4 Rechnen im Binärsystem: Addition
- 5 Rechnen im Binärsystem: Negative Zahlen & Subtraktion
- 6 Codes zum Binärsystem
- 7 Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

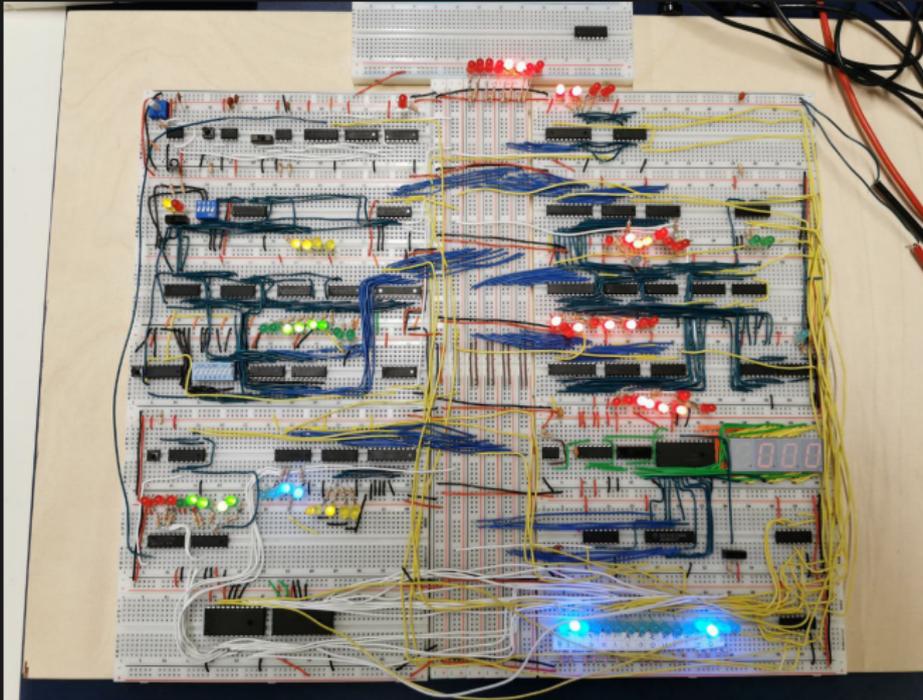
KAHOOT!

- Verstehen, was Bit-Zahl von Computerarchitektur bedeutet
- Wissen, warum beim 2er-Komplement feste Anzahl Bits nötig ist
- Binärzahlen schriftlich multiplizieren können

Computerarchitektur



- Bsp.: 8-Bit Computer kann nur mit 8–Bit Zahlen umgehen
- Für jede Zahl stehen also 8 Bits zur Verfügung - auch für negative Zahlen



8-Bit CPU, gebaut von TALIT Schülern

Negative Zahlen auf 4-Bit Rechner

- 4-Bit Rechner: 4 Bits pro Zahl
- Dezimalzahl 5 ist offensichtlich $5_{10} = 0101_2$
- Entsprechende Gegenzahl? $-5_{10} = \text{????}$
- Muss erfüllen

$$\begin{array}{r} 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ + \ ? \ ? \ ? \ ? \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

- Lösung: $-5_{10} = 1011_2$
- Kontrolle: $0101 + 1011 = 1\ 0000$
- Achtung: Fünftes Bit irrelevant, da nur 4-Bit Rechner \rightarrow fällt weg
- 1011_2 heisst **2er-Komplement** von 0101_2 in 4-Bit ist.

Bedeutung von Zahlen

Frage: $1011 = ?$

- Tausend und Elf (falls Dezimalzahl)
- 11_{10} falls positive Binärzahl
- -5_{10} falls 4-Bit Zahl mit negativen Zahlen
- 4113_{10} falls positive Hexadezimalzahl
- unendlich viele weitere Möglichkeiten
- Und die Moral von der Geschichte?
- Zahl hängt immer davon ab, wie sie **interpretiert** wird!

- Aufgabe 3.13 (Multiplikation von Binärzahlen)
- Aufgabe 3.14 (Code dazu schreiben)